1eres S-DST du 30-01-2017-Calculatrice autorisée *(60 points)*

Exercice 1 *(6 points)*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et admet pour représentation graphique la courbe Ƥ.

1) Déterminer la fonction f, sachant que :
- Ƥ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3 ;
- Ƥ coupe l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 ;
- Ƥ admet pour tangente en B la droite d'équation $y = 2x + 2$.

2) Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de Ƥ avec l'axe des abscisses.

Exercice 2 *(11 points)*

1) Déterminer les nombres a, b et c, pour que la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ait un minimum égal à $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{2}$ et qu'elle prenne la valeur 1 en 1. Faire alors le graphique C_f de la fonction f.
2) Discuter, en fonction des valeurs de m, le nombre de points d'intersection de C_f et de la droite Δ ayant pour équation $y = mx$.
3) Lorsque Δ coupe C_f en deux points M et M', on considère le milieu I de [MM']. Quel est l'ensemble décrit par I lorsque m varie ? Vous définirez la partie de la parabole décrite. (**Question difficile**)

Exercice 3 *(12 points)*

En 1798 Malthus publie *"An essay on the principle of population".* Il y émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira le monde à la famine. En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions et l'agriculture Anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Malthus supposa que la population augmentait d'environ 2% chaque année et que l'amélioration de l'agriculture permettait de nourrir 500 000 personnes de plus chaque année. Pour $n \geq 0$, on note P_n la population de l'année $1800 + n$ et on note a_n le nombre de personnes que l'agriculture permet de nourrir cette même année.

1) a) Exprimer P_n en fonction de n.

b) D'après Malthus, quelle aurait été la population en 1900 ?

2) Combien l'agriculture aurait-elle pu nourrir de personnes en 1900 selon ses prévisions ?

3) On souhaite déterminer en quelle année la situation devrait devenir critique selon Malthus.

Pour cela :

a) Vous définirez une troisième suite *(e_n)* mesurant l'écart entre le nombre de personnes que l'agriculture permettrait de nourrir en 1800 + n et la population de l'année 1800 + n.

b) Vous écrirez sur votre copie un programme pour la calculatrice qui permet de répondre à la question et vous donnerez la réponse fournie par votre calculatrice avec votre programme.

Exercice 4 : *(11 points)* Résoudre dans l'intervalle $\left]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}\right]$ les équations suivantes :

1) $2sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

2) $\cos(2x)=-cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

3) $cos^2x-cosx=0$

4) $sin3x=0$

Exercice 5 : *(8 points)*

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $\boldsymbol{u_0=5}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1}}=\dfrac{\boldsymbol{6u_n+4}}{\boldsymbol{u_n+9}}$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\boldsymbol{v_n}=\dfrac{\boldsymbol{u_n+4}}{\boldsymbol{u_n-1}}$

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4) Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$

Exercice 6 : *(12 points)*

On considère un triangle équilatéral AEC inscrit dans le rectangle AEFD. A l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I sont centre. Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement ; le but de l'exercice est de montrer que les points I et J appartiennent respectivement aux segments [AC] et [EC].

1. Démontrer la propriété suivante :
$Si\ (\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )\ =\ (\vec{u}\ ;\ \vec{w})$ alors $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens.

2. a. Justifier que $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{6}$.

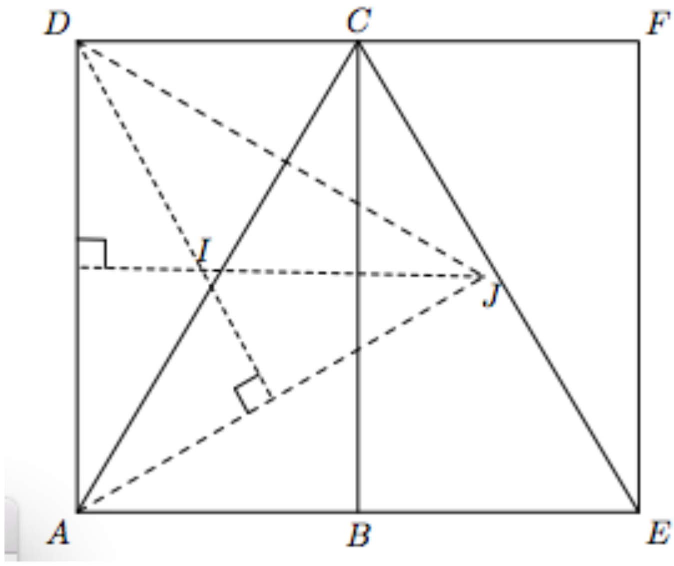
   b. Justifier que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IA}\right)$ mesure $\frac{2\pi}{3}$.

   c. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. a. Justifier que le triangle DCJ est isocèle en C.

   b. En déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CJ})$.

   c. En déduire que les points J, E, C sont alignés.



Bonus : *(4 points :2+2)*

1) Deux nombres ont une somme S. Quelle est la valeur maximale de leur produit ?
2) Deux nombres positifs ont pour produit P, quelle est la valeur minimale de leur somme ?